Familii de modele reduse pentru sisteme liniare de tip descriptor, prin potrivirea momentelor

prezentare ECC 2016

Philipp Schulze[1] **Tudor C. Ionescu**[2] Jacquelien M. A. Scherpen[3]

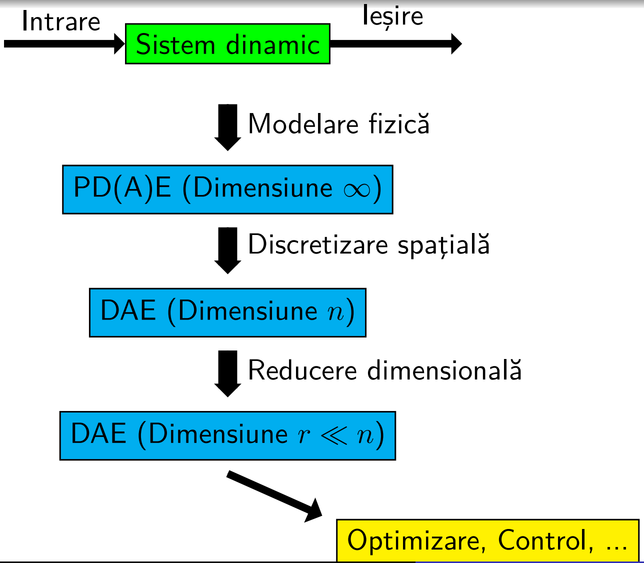
[1]Technische Universität Berlin

[2]Politehnica University of Bucharest

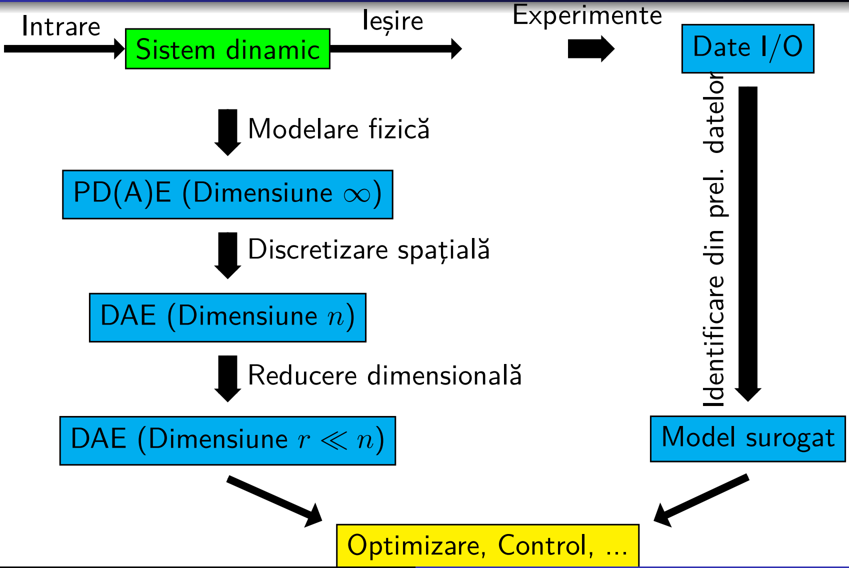
[3]University of Groningen

8 dec. 2016

Modelare redusă: Convențional vs Prelucrarea datelor



Modelare redusă: Convențional vs Prelucrarea datelor



Cuprins

Problematica realizării (SISO)

Presupunem că avem date ale unei funții de transfer $H(s)$:

- *puncte de interpolare* distincte μ_i și λ_i,
- *valori de interpolat* v_i and w_i.

$$H(\mu_i) = v_i, \qquad H(\lambda_i) = w_i \qquad \text{for } i = 1, \dots, \nu$$

Q: Putem construi $\tilde{E}$, $\tilde{A}$, $\tilde{b}$, și $\tilde{c}$ a.î.

$$\begin{cases} \tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{b}u(t), \\ \tilde{y}(t) = \tilde{c}\tilde{x}(t), \end{cases} \qquad \tilde{H}(s) = \tilde{c}\left(s\tilde{E} - \tilde{A}\right)^{-1}\tilde{b}$$

interpolează datele, i. e.,

$$H(\mu_i) = v_i = \tilde{H}(\mu_i) \qquad H(\lambda_i) = w_i = \tilde{H}(\lambda_i), \qquad i = 1:\nu?$$

Realizarea Loewner [Mayo/Antoulas LAA07]

$$\begin{cases} -\mathbb{L}\dot{\tilde{x}}(t) = -\mathbb{L}_\sigma \tilde{x}(t) + vu(t), \\ \tilde{y}(t) = w\tilde{x}(t), \end{cases} \qquad H_L(s) = w\left(\mathbb{L}_\sigma - s\mathbb{L}\right)^{-1} v,$$

cu

$$[\mathbb{L}]_{i,j} = \frac{v_i - w_j}{\mu_i - \lambda_j}, \qquad v = [v_1 \ \ldots \ v_\nu]^T$$

$$[\mathbb{L}_\sigma]_{i,j} = \frac{\mu_i v_i - \lambda_j w_j}{\mu_i - \lambda_j}, \quad w = [w_1 \ \ldots \ w_\nu]$$

e un model interpolant minimal (în ipoteze de regularitare a fasciculului $\mathbb{L}_\sigma - s\mathbb{L}$).

Potrivirea momentelor într-un set de puncte

Q: Fie un sistem de dimensiune n

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \\ y(t) = cx(t), \end{cases} \qquad H(s) = c\,(sE - A)^{-1}\,b,$$

se caută un sistem de dimensiune $\nu \ll n$

$$\begin{cases} \tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{b}u(t), \\ \tilde{y}(t) = \tilde{c}\tilde{x}(t), \end{cases} \qquad \tilde{H}(s) = \tilde{c}\left(s\tilde{E} - \tilde{A}\right)^{-1}\tilde{b}$$

care interpolează $H\,(s)$ în s_i, $i = 1 : \nu$, i. e.,

$$H(s_i) = \tilde{H}(s_i),\ \ i = 1 : \nu.$$

Momentele ca soluții ale unor ecuații matriciale [Gallivan/Vandendorpe/Van Dooren '04]

$$H(s_i) = c\underbrace{(s_iE - A)^{-1}b}_{=:\pi_i} = c\pi_i$$

$$H(s_i) = \underbrace{c(s_iE - A)^{-1}}_{=:\psi_i}b = \psi_i b$$

π_i și ψ_i sunt soluțiile unice ale ecuațiilor vectoriale

$$s_iE\pi_i - A\pi_i = b,$$

$$s_i\psi_iE - \psi_iA = c,$$

respectiv.

Momentele ca soluții ale unor ecuații matriciale
[Gallivan/Vandendorpe/Van Dooren '04]

$$[H(s_1)\ \dots\ H(s_\nu)] = c[\pi_1\ \dots\ \pi_\nu] = c\Pi$$
$$[H(s_1)\ \dots\ H(s_\nu)] = [\psi_1\ \dots\ \psi_\nu]\,b = \Psi b$$

Π și Ψ sunt soluțiile unice ale ecuațiilor matriciale

$$E\Pi S - A\Pi = br,$$

$$S\Psi E - \Psi A = r^T c,$$

respectiv, cu

$$S = \mathrm{diag}([s_1\ \dots\ s_\nu]), \quad r = [1\ \dots\ 1] \in \mathbb{R}^{1,\nu}.$$

Condiții pentru potrivirea momentelor 'MM'

Sistemul

$$\begin{cases} \tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{b}u(t), \\ \tilde{y}(t) = \tilde{c}\tilde{x}(t), \end{cases}$$

potrivește momentele $[H(s_1) \ \ldots \ H(s_\nu)]$ dacă și numai dacă

$$c\Pi = \tilde{c}\tilde{\Pi}$$

unde $\tilde{\Pi}$ e soluția unică a ecuației matriciale

$$\tilde{E}\tilde{\Pi}S - \tilde{A}\tilde{\Pi} = \tilde{b}r.$$

Familii de modele care potrivesc momentele

$$\begin{cases} \tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \left(\tilde{E}\tilde{\Pi}S\tilde{\Pi}^{-1} - \tilde{b}r\tilde{\Pi}^{-1}\right)\tilde{x}(t) + \tilde{b}u(t), \\ \tilde{y}(t) = c\Pi\tilde{\Pi}^{-1}\tilde{x}(t), \end{cases}$$

parametrizate în $\tilde{E}$, $\tilde{b}$, and $\tilde{\Pi}$.

$$\begin{cases} \tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \left(\tilde{\Psi}^{-1}S\tilde{\Psi}\tilde{E} - \tilde{\Psi}^{-1}r^T\tilde{c}\right)\tilde{x}(t) + \tilde{\Psi}^{-1}\Psi bu(t), \\ \tilde{y}(t) = \tilde{c}\tilde{x}(t), \end{cases}$$

parametrizate în $\tilde{E}$, $\tilde{c}$, and $\tilde{\Psi}$.

Familii de modele care potrivesc momentele

$$\begin{cases} \tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \left(\tilde{E}\tilde{\Pi}S\tilde{\Pi}^{-1} - \tilde{b}r\tilde{\Pi}^{-1}\right)\tilde{x}(t) + \tilde{b}u(t), \\ \tilde{y}(t) = c\Pi\tilde{\Pi}^{-1}\tilde{x}(t), \end{cases}$$

parametrizate în $\tilde{E}$, $\tilde{b}$, and $\tilde{\Pi}$.

$$\begin{cases} \tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \left(\tilde{\Psi}^{-1}S\tilde{\Psi}\tilde{E} - \tilde{\Psi}^{-1}r^{T}\tilde{c}\right)\tilde{x}(t) + \tilde{\Psi}^{-1}\Psi bu(t), \\ \tilde{y}(t) = \tilde{c}\tilde{x}(t), \end{cases}$$

parametrizate în $\tilde{E}$, $\tilde{c}$, and $\tilde{\Psi}$.

Familii de modele care potrivesc momentele

$$H(\lambda_i) = w_i, \quad \Lambda = \text{diag}\left([\lambda_1 \ \ldots \ \lambda_\nu]\right)$$

$$\begin{cases} \tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \left(\tilde{E}\tilde{\Pi}\Lambda\tilde{\Pi}^{-1} - \tilde{b}r\tilde{\Pi}^{-1}\right)\tilde{x}(t) + \tilde{b}u(t), \\ \tilde{y}(t) = w\tilde{\Pi}^{-1}\tilde{x}(t), \end{cases}$$

parametrizate în $\tilde{E}$, $\tilde{b}$, and $\tilde{\Pi}$.

$$H(\mu_i) = v_i, \quad M = \text{diag}\left([\mu_1 \ \ldots \ \mu_\nu]\right)$$

$$\begin{cases} \tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \left(\tilde{\Psi}^{-1}M\tilde{\Psi}\tilde{E} - \tilde{\Psi}^{-1}r^T\tilde{c}\right)\tilde{x}(t) + \tilde{\Psi}^{-1}vu(t), \\ \tilde{y}(t) = \tilde{c}\tilde{x}(t), \end{cases}$$

parametrizate în $\tilde{E}$, $\tilde{c}$, and $\tilde{\Psi}$.

Familii de modele care potrivesc momente

Familia de sisteme descriptor care potrivește atât momentele

$H(\lambda_i) = w_i = \tilde{H}(\lambda_i)$, cât și momentele $H(\mu_i) = v_i = \tilde{H}(\mu_i)$ *este*

$$\begin{cases} \tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \left(\tilde{E}\tilde{\Pi}\Lambda\tilde{\Pi}^{-1} - \tilde{\Psi}^{-1}vr\tilde{\Pi}^{-1}\right)\tilde{x}(t) + \tilde{\Psi}^{-1}vu(t), \\ \tilde{y}(t) = w\tilde{\Pi}^{-1}\tilde{x}(t), \end{cases}$$

unde $\tilde{E}$ e soluția unică a ecuației matriciale

$$\tilde{\Psi}\tilde{E}\tilde{\Pi}\Lambda - M\tilde{\Psi}\tilde{E}\tilde{\Pi} = vr - r^T w$$

cu parametrii liberi $\tilde{\Pi}$ și $\tilde{\Psi}$.

Loewner v. Moment Matching

Modelul Loewner

$$\begin{cases} -\mathbb{L}\dot{\tilde{x}}(t) = -\mathbb{L}_\sigma \tilde{x}(t) + vu(t), \\ \tilde{y}(t) = w\tilde{x}(t), \end{cases}$$

Modelele care potrivesc momente

$$\begin{cases} \tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \underbrace{\left(\tilde{E}\tilde{\Pi}\Lambda\tilde{\Pi}^{-1} - \tilde{\Psi}^{-1}vr\tilde{\Pi}^{-1}\right)}_{=\tilde{A}}\tilde{x}(t) + \tilde{\Psi}^{-1}vu(t), \\ \tilde{y}(t) = w\tilde{\Pi}^{-1}\tilde{x}(t), \end{cases}$$

cu

$$\tilde{\Psi}\tilde{E}\tilde{\Pi}\Lambda - M\tilde{\Psi}\tilde{E}\tilde{\Pi} = vr - r^T w.$$

Legătura:

$$\tilde{\Psi}\tilde{E}\tilde{\Pi} = -\mathbb{L}, \quad \tilde{\Psi}\tilde{A}\tilde{\Pi} = -\mathbb{L}_\sigma.$$

Cuprins

Familiile de modele reduse care potrivesc momente

$$H(\lambda_i) = w_i = \tilde{H}(\lambda_i)$$

$$\begin{cases} \tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \left(\tilde{E}\tilde{\Pi}\Lambda\tilde{\Pi}^{-1} - \tilde{b}r\tilde{\Pi}^{-1}\right)\tilde{x}(t) + \tilde{b}u(t), \\ \tilde{y}(t) = w\tilde{\Pi}^{-1}\tilde{x}(t), \end{cases}$$

parametrizate în $\tilde{E}$, $\tilde{b}$, and $\tilde{\Pi}$.

$$H(\mu_i) = v_i = \tilde{H}(\mu_i)$$

$$\begin{cases} \tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \left(\tilde{\Psi}^{-1}M\tilde{\Psi}\tilde{E} - \tilde{\Psi}^{-1}r^T\tilde{c}\right)\tilde{x}(t) + \tilde{\Psi}^{-1}vu(t), \\ \tilde{y}(t) = \tilde{c}\tilde{x}(t), \end{cases}$$

parametrizate în $\tilde{E}$, $\tilde{c}$, and $\tilde{\Psi}$.

Exploatarea gradelor de libertate: plasarea polilor

$$H\left(\mu_i\right) = v_i = \tilde{H}\left(\mu_i\right)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \left(M - r^T\tilde{c}\right)\tilde{x}(t) + vu(t), \\ \tilde{y}(t) = \tilde{c}\tilde{x}(t), \end{cases}$$

cu parametrul liber $\tilde{c}$.

Exploatarea gradelor de libertate: plasarea polilor

$$H(\mu_i) = v_i = \tilde{H}(\mu_i)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \left(M - r^T \tilde{c}\right) \tilde{x}(t) + vu(t), \\ \tilde{y}(t) = \tilde{c}\tilde{x}(t), \end{cases}$$

cu parametrul liber $\tilde{c}$.

Plasarea polilor

- dacă $\left(M, r^T\right)$ e controlabilă, putem plasa polii arbitrar;
- dacă valorile μ_i sunt distincte și nenule, $\left(M, r^T\right)$ e controlabilă;

Exploatarea gradelor de libertate: plasarea polilor

$$H\left(\mu_i\right) = v_i = \tilde{H}\left(\mu_i\right)$$

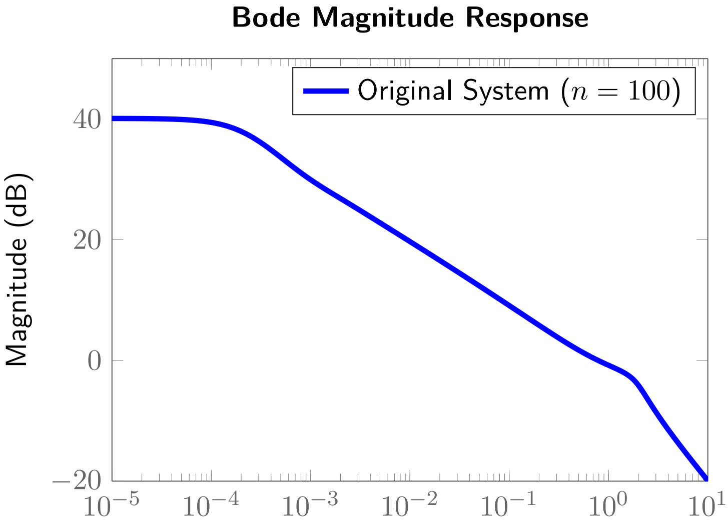
$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \left(M - r^T\tilde{c}\right)\tilde{x}(t) + vu(t), \\ \tilde{y}(t) = \tilde{c}\tilde{x}(t), \end{cases}$$

cu parametrul liber $\tilde{c}$.

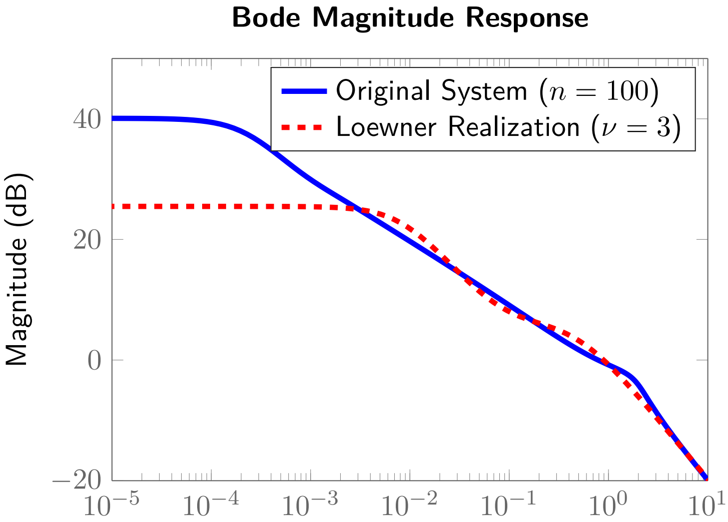
Plasarea polilor

- dacă $\left(M, r^T\right)$ e controlabilă, putem plasa polii arbitrar;
- dacă valorile μ_i sunt distincte și nenule, $\left(M, r^T\right)$ e controlabilă;
- ideea: alegem polii care minimizează eroarea $\left\|H\left(s\right) - \tilde{H}\left(s\right)\right\|_{\mathcal{H}_2}$.

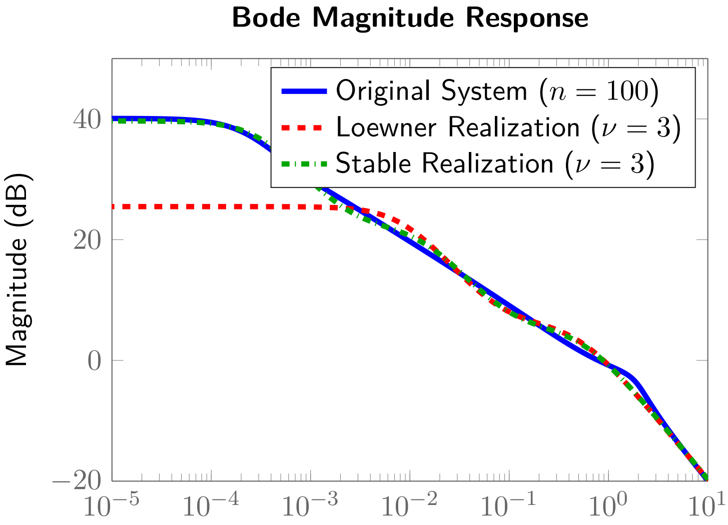
Exemplu: circuitul de tip scară [Polyuga '10]



Exemplu: circuitul de tip scară [Polyuga '10]



Exemplu: circuitul de tip scară [Polyuga '10]



Extinderea la alte structuri
[S./Unger/Beattie/Gugercin in preparation]

Sisteme de ordinul al doilea: $H(\lambda_i) = c \underbrace{\left(\lambda_i^2 A_1 + \lambda_i A_2 + A_3\right)^{-1} b}_{=:\pi_i}$

Sisteme cu întârziere:

$$H(\lambda_i) = c \underbrace{\left(\lambda_i A_1 - A_2 - \sum_{j=3}^{K} \exp\left(-\tau_{j-2}\lambda_i\right) A_j\right)^{-1} b}_{=:\pi_i}$$

Structură generală: $H(\lambda_i) = c \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{K} h_k\left(\lambda_i\right) A_k\right)^{-1} b}_{=:\pi_i}$

Concluzii

Summary

- stabilirea relației dintre formalismul Loewner și potrivirea momentelor;
- generează posibilitatea de
  - a obține modele stabile;
  - extindere la structuri mai generale;

Cercetări ulterioare

- plasarea optimă polilor
- studiul serios, în contextul descriptor și al factorizărilor, al păstrării stabilității și/sau a pasivității.

References

- P. Schulze, T. C. Ionescu, and J. M. A. Scherpen. Families of moment matching-based reduced order models for linear descriptor systems. *European Control Conference (ECC)*, 2016.
- T.C. Ionescu, A. Astolfi and P. Colaneri. Families of moment matching based, low order approximations for linear systems. *Systems & Control Letters*, 64:47-56, 2014.
- T. C. Ionescu. Two-Sided Time-Domain Moment Matching for Linear Systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 61(9): 2632-2037, 2016.
- P. Schulze, B. Unger, C. Beattie, and S. Gugercin. Data-Driven Structured Realizations. In preparation.
- A. Astolfi. Model reduction by moment matching for linear and nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*,