Tehnici de factorizare pentru reglarea sistemelor generalizate

Cristian Flutur

Universitatea Politehnică București
Facultatea de Automatică și Calculatoare

Aprilie 2016

Cuprins

Fascicole matriceale

1. Forme canonice. Invarianți canonici
   - Forma canonica Weierstrass
   - Forma canonica Kronecker
   - Valori proprii generalizate, multiplicități
   - Structură singulară
2. Subspații de deflație

$$\dim(A\mathcal{V} + E\mathcal{V}) = \dim\mathcal{V}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 - \lambda E_1 & A_{12} - \lambda E_{12} \\ 0 & A_2 - \lambda E_2 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda E)|_{\mathcal{V}} = S - \lambda T$$

$$AVT = EVS$$

Raționale matriceale

Forma Smith McMillan

$$R(\lambda) = \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{\epsilon_1(\lambda)}{\eta_1(\lambda)}(\alpha-\lambda\beta)^{k_1} & & & & \\ & \frac{\epsilon_2(\lambda)}{\eta_2(\lambda)}(\alpha-\lambda\beta)^{k_2} & & & \\ & & \ddots & & 0_{r\times(m-r)} \\ & & & \frac{\epsilon_r(\lambda)}{\eta_r(\lambda)}(\alpha-\lambda\beta)^{k_r} & \\ \hline & & 0_{(p-r)\times r} & & 0_{(p-r)\times(m-r)} \end{array}\right]$$

Invarianți canonici

- μ este pol (zerou) finit al lui $R(\lambda)$ dacă este pol (zerou) al unui factor invariant $\frac{\epsilon_i}{\eta_i}$
- $\mu = \infty$ este pol al lui $R(\lambda)$ dacă $\partial\eta_i - \partial\epsilon_i - k_i < 0$
- $\mu = \infty$ este zerou al lui $R(\lambda)$ dacă $\partial\eta_i - \partial\epsilon_i - k_i > 0$

Raționale matriceale

Vectori polinomiali

$$p(\lambda) = \begin{bmatrix} \nu_1(\lambda) & \dots & \nu_n(\lambda) \end{bmatrix}^T, \quad \nu \in \mathbb{C}[\lambda]$$

Indicele unui vector polinomial $p(\lambda)$ – cea mai mare putere a lui λ ce apare in componentele $\nu_i(\lambda)$

Nucleu polinomial

$$R(\lambda)v(\lambda) = 0 \Rightarrow v(\lambda) \in N_r(R)$$

Nucleul $N_r(R)$ generat de

$$\{p_1(\lambda) \dots p_k(\lambda)\}$$

Realizări ale raționalelor matriceale

Realizări standard

$$R(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A - \lambda I & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = D + C(\lambda I - A)^{-1}B$$

Realizări descriptor

$$R(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A - \lambda E & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = D + C(\lambda E - A)^{-1}B$$

Realizări centrate

$$R(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A - \lambda E & B(\alpha - \lambda\beta) \\ \hline C & D \end{array}\right] = D + C(\lambda E - A)^{-1}B(\alpha - \lambda\beta)$$

Raționale matriceale - structură

Realizare minimală centrată

$$R(\lambda) = D + C(\lambda E - A)^{-1}B(\alpha - \beta\lambda) =: \left[\begin{array}{c|c} A - \lambda E & B \\ \hline C & D \end{array}\right]_{\lambda_0}$$

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} A - \lambda E & B(\alpha - \lambda\beta) \\ C & D \end{bmatrix}$$

Structura

- structura de poli este aceeași cu structura de valori proprii generalizate a fascicolului $A - \lambda E$
- structura de zerouri finite este aceeași cu structura de valori proprii generalizate finite a fascicolului $P(\lambda)$
- structura de zerouri infinite se regăsește în structura de valori proprii generalizate infinite a fascicolului $P(\lambda)$, iar fiecărei multiplicități parțiale din rațională îi corespunde, în fascicolul $P(\lambda)$, aceeași multiplicitate parțială $+1$
- structura de nucleu a raționalei este aceeași cu structura de nucleu a fascicolului $P(\lambda)$

Factorizare minimală

Formularea problemei

Scriem

$$R(\lambda) = R_1(\lambda)R_2(\lambda)$$

R_1 și R_2 au, fiecare, parte din structura poli-zerouri a lui $R(\lambda)$, exclusiv.

Realizare factorizabilă

$$R(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A-\lambda E & B \\ \hline C & D \end{array}\right]_{\lambda_0} = \left[\begin{array}{cc|c} A_1-\lambda E_1 & 0 & B_1 \\ E_{21}(\lambda_0-\lambda) & A_2-\lambda E_2 & B_{22} \\ \hline C_{11} & C_2 & D \end{array}\right]_{\lambda_0}$$

Condiție

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} E_{21} & B_{22} \\ C_{11} & D \end{bmatrix} = m$$

Factorizare minimală

Condiție de existență

$R(\lambda)$ are o realizare factorizabilă dacă și numai dacă

- Fascicolul de poli $A - \lambda E$ are un subspațiu de deflație $\mathcal{W}$
- Fascicolul replicativ $N - \lambda M$ are un subspațiu de deflație $\mathcal{V}$
- $\mathbb{R}^n = \mathcal{W} \oplus \mathcal{V}_n$

Rezultat publicat

C. Flutur, C. Oară. *Minimal factorization for transfer matri- ces of generalized systems*. In System Theory, Control and Computing (ICSTCC), 2014 18th International Conference, pages 13 - 18. IEEE, 2014.
DOI: 10.1109/ICSTCC.2014.6982383

Factorizări Wiener Hopf

Factorizare spectrală neminimală

$$R(\lambda) = R_1(\lambda)D(\lambda)R_2(\lambda),$$

Factorii spectrali au, fiecare, parte din structura poli–zerouri a lui $R(\lambda)$

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\lambda-\lambda_-}{\lambda-\lambda_+}\right)^{k_1} & & & \\ & \left(\frac{\lambda-\lambda_-}{\lambda-\lambda_+}\right)^{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \left(\frac{\lambda-\lambda_-}{\lambda-\lambda_+}\right)^{k_m} \end{bmatrix}$$

Rezultat publicat

C. Oară, C. Flutur. Nonminimal Spectral Factorization of a Descriptor System. CEAI, Vol.12, No. 2, pp. 10-16, 2010

Dislocarea simultană a structurii singulare și a zerourilor nedorite

Formularea problemei

$G \in \mathbb{R}^{p\times m}(\lambda)$ cu rangul normal r. $\overline{\mathbb{C}} = \Gamma_g \cup \Gamma_b$

$$G_{b\ell}(\lambda) \cdot G(\lambda) \cdot G_{br}(\lambda) = \begin{bmatrix} \widetilde{G}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\widetilde{G}(\lambda)$ este pătrat, inversabil și are doar zerouri într-o regiune prestabilită

Compresia rangului pe linii

$$G_c(\lambda)G(\lambda) = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} G_{sz}(\lambda) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \}r \\ \end{array} \end{array}$$

Realizare centrată

$$G(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A-\lambda E & B \\ \hline C & D \end{array}\right]_{\lambda_0}$$

Construcția soluției

Proiecție spectrală

$$\begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc} A-\lambda E & B(\alpha-\beta\lambda) \\ \hline C & D \end{array}\right] Z =$$

$$\left[\begin{array}{ccc} A_{rg}-\lambda E_{rg} & \star & \star \\ 0 & A_{b\ell}-\lambda E_{b\ell} & B_{b\ell}(\alpha-\beta\lambda) \\ \hline 0 & C_{b\ell 1} & D_{b\ell 1} \\ 0 & C_{b\ell 2} & 0 \end{array}\right]$$

unde

- $A_{rg} - \lambda E_{rg}$ are rang întreg pe linii $\forall\lambda$ în afara lui Γ_g și conține toate zerourile pe care $G(\lambda)$ le are în Γ_g
- $\beta A_{b\ell} - \alpha E_{b\ell}$ și $D_{b\ell 1}$ sunt inversabile

Construcția soluției

$$\begin{bmatrix} A_{b\ell} - \lambda E_{b\ell} & B_{b\ell}(\alpha - \beta\lambda) \\ C_{b\ell} & D_{b\ell} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A_{b\ell} - \lambda E_{b\ell} & B_{b\ell}(\alpha - \beta\lambda) \\ C_{b\ell 1} & D_{b\ell 1} \\ C_{b\ell 2} & 0 \end{bmatrix}$$

- are rang întreg pe coloane pentru orice λ în afara lui Γ_b
- conține toate zerourile pe care $G(\lambda)$ le are în Γ_b
- $A_{b\ell} - \lambda E_{b\ell}$ este regulat
- Perechea $\begin{bmatrix} A_{b\ell} - \lambda E_{b\ell} & B_{b\ell} \end{bmatrix}$ este controlabilă
- U, Q și Z se pot construi prin metode numerice stabile

Clasa soluțiilor statice

Condiția de existență

$$\begin{bmatrix} A_{b\ell} - \lambda E_{b\ell} & B_{b\ell}(\alpha - \beta\lambda) \\ C_{b\ell} & D_{b\ell} \end{bmatrix}$$

nu are valori proprii în $\overline{\mathbb{C}}$ și

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} = \operatorname{rang} D$$

Forma compensatorului static

$$G_c = PQ, \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

Clasa soluțiilor dinamice

Forma compensatorului dinamic

$$G_c(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} A_c - \lambda E_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array}\right]_{\lambda_0} Q :=$$

$$P \left[\begin{array}{c|cc} A_{b\ell} - \lambda E_{b\ell} - (B_{b\ell} D_{b\ell 1}^{-1} C_{b\ell 1} + K C_{b\ell 2})(\alpha - \beta\lambda) & B_{b\ell} D_{b\ell 1}^{-1} & K \\ \hline -C_{b\ell 1} - D_{b\ell 1} F & I & 0 \\ -C_{b\ell 2} & 0 & I \end{array}\right]_{\lambda_0} Q$$

Sistemul rezultant

$$G_{sz}(\lambda) = P \left[\begin{array}{c|c} A - \lambda E & B \\ \hline C_{sz} & D_{sz} \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc} C_{sz} & D_{sz} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & -D_{b\ell 1} F & D_{b\ell 1} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] Z^*$$

- $F \in \mathbb{C}^{r \times (n_\ell + n_b)}$ rezolvă $\Lambda(A_{b\ell} - \lambda E_{b\ell} + B_{b\ell} F(\alpha - \beta\lambda)) \subset \Gamma_g$
- P și K sunt matrice arbitrare (P inversabilă)

Plasarea polilor

$$\left[\begin{array}{cc} A_{b\ell}-\lambda E_{b\ell} & B_{b\ell}(\alpha-\lambda\beta) \\ C_{b\ell 1} & D_{b\ell} \\ C_{b\ell 2} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} A_b-\lambda E_b & \star & B_b(\alpha-\lambda\beta) \\ 0 & A_\ell-\lambda E_\ell & B_\ell(\alpha-\lambda\beta) \\ 0 & C_{\ell 1} & D_{b\ell} \\ 0 & C_{\ell 2} & 0 \end{array}\right]$$

Polii compensatorului

$$A_{b\ell}-\lambda E_{b\ell}-(B_{b\ell}D_{b\ell}^{-1}C_{b\ell 1}+KC_{b\ell 2})(\alpha-\beta\lambda) =$$

$$= \left[\begin{array}{cc} A_b-\lambda E_b & \star \\ 0 & A_\ell-\lambda E_\ell-(B_bD_{b\ell 1}^{-1}C_{\ell 1}+K_2C_{\ell 2})(\alpha-\beta\lambda) \end{array}\right]$$

Plasarea zerourilor

Fascicolul sistem al compensatorului

$$\begin{bmatrix} A_{b\ell} - \lambda E_{b\ell} + B_{b\ell} F(\alpha - \beta\lambda) & B_{b\ell} D_{b\ell 1}^{-1}(\alpha - \beta\lambda) & K(\alpha - \beta\lambda) \\ 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Zerourile compensatorului

$$A_{b\ell} - \lambda E_{b\ell} + B_{b\ell} F(\alpha - \beta\lambda)$$

Compensatoare unitare - timp continuu

Ecuația Riccati continuă

$$A_{b\ell}^* X E_{b\ell} + E_{b\ell}^* X A_{b\ell} - ((\alpha E_{b\ell} - \beta A_{b\ell})^* X B_{b\ell} + C_{b\ell}^* D_{b\ell}) \times$$

$$\times (D_{b\ell}^* D_{b\ell})^{-1} (B_{b\ell}^* X (\alpha E_{b\ell} - \beta A_{b\ell}) + D_{b\ell}^* C_{b\ell}) + C_{b\ell}^* C_{b\ell} = 0$$

Clasa compensatoarelor unitare

$$G_c(s) := P \left[\begin{array}{c|c} A_{b\ell} - sE_{b\ell} - KC_{b\ell}(\alpha - \beta s) & K \\ \hline -C_{b\ell} - D_{b\ell} F & I \end{array} \right]_{s_0} Q$$

unde

$$F = -(D_{b\ell}^* D_{b\ell})^{-1} (B_{b\ell}^* X (\alpha E_{b\ell} - \beta A_{b\ell}) + D_{b\ell}^* C_{b\ell}),$$

$$K = -X^{-1} (\alpha E_{b\ell} - \beta A_{b\ell})^{-*} \times (C_{b\ell} + D_{b\ell} F)^*,$$

Compensatoare unitare - timp discret

Ecuația Riccati discretă

$$E_{b\ell}^* X E_{b\ell} - A_{b\ell}^* X A_{b\ell} - ((\alpha E_{b\ell} - \overline{\alpha} A_{b\ell})^* X B_{b\ell} + C_{b\ell}^* D_{b\ell}) \times$$

$$\times (D_{b\ell}^* D_{b\ell})^{-1} (B_{b\ell}^* X (\alpha E_{b\ell} - \overline{\alpha} A_{b\ell}) + D_{b\ell}^* C_{b\ell}) + C_{b\ell}^* C_{b\ell} = 0$$

Clasa compensatoarelor unitare

$$G_c(z) := P \left[\begin{array}{c|c} A_{b\ell} - zE_{b\ell} - KC_{b\ell}(\alpha - \overline{\alpha} z) & K \\ \hline -C_{b\ell} - D_{b\ell} F & I \end{array} \right]_{z_0} Q$$

unde

$$F = -(D_{b\ell}^* D_{b\ell})^{-1} (B_{b\ell}^* X (\alpha E_{b\ell} - \overline{\alpha} A_{b\ell}) + D_{b\ell}^* C_{b\ell})$$

$$K = -X^{-1} (\alpha E_{b\ell} - \overline{\alpha} A_{b\ell})^{-*} \times (C_{b\ell} + D_{b\ell} F)^*$$

Exemple numerice

Polinimială matriceală

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda + 5 & \lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda + 6 & 2\lambda^3 - 8\lambda^2 + 4\lambda + 9 \\ 2\lambda^3 - 7\lambda^2 + 4\lambda + 6 & 2\lambda^3 - 7\lambda^2 + 4\lambda + 8 & 4\lambda^3 - 14\lambda^2 + 8\lambda + 10 \\ 2\lambda^3 - 8\lambda^2 + 12\lambda - 6 & 2\lambda^3 - 8\lambda^2 + 12\lambda - 4 & 4\lambda^3 - 16\lambda^2 + 24\lambda - 14 \end{bmatrix}$$

Realizare centrată

$$G(\lambda) = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1-\lambda & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hdashline 1 & -4 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 2 & -7 & 4 & 5 & 7 & 8 \\ 2 & -8 & 12 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right]_{\lambda_0=1}$$

Structură

- un pol la ∞ cu multiplicitate 3
- un zerou în 2 cu multiplicitate 1
- un zerou la ∞ cu multiplicitate 1
- un indice minimal la dreapta egal cu 0
- un indice minimal la stânga egal cu 1

Exemple numerice

Proiecția spectrală

$$\left[\begin{array}{cc:cc:cc} 0 & 8-4\lambda & -1 & 4-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0.5 & -1+0.5\lambda & -0.5+0.5\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5+0.5\lambda & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -0.8 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Compensatorul

$$G_c(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{0.5\lambda^2+\lambda-1.5}{\lambda-6} & \frac{-0.5\lambda^2-4.5}{\lambda-6} \\ 0 & \frac{-1.25\lambda^2-2.5\lambda-1.25}{\lambda-6} & \frac{1.25\lambda^2+2.5\lambda+1.25}{\lambda-6} \\ 1 & \frac{4}{\lambda-6} & \frac{-0.5\lambda-1}{\lambda-6} \end{bmatrix}$$

Exemple numerice

Sistemul rezultat

$$G_{sz}(\lambda) = G_c(\lambda)G(\lambda) =$$

$$\begin{bmatrix} 2.5\lambda^3 - 8\lambda^2 + 8.5\lambda - 3 & 2.5\lambda^3 - 8\lambda^2 + 8.5\lambda - 1 & 5\lambda^3 - 16\lambda^2 + 17\lambda - 8 \\ -1.25\lambda^3 + 3.75\lambda + 2.5 & -1.25\lambda^3 + 3.75\lambda + 2.5 & -2.5\lambda^3 + 7.5\lambda + 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Structura sistemului rezultat

- un pol la ∞ cu multiplicitate 3
- un zerou în 2 cu multiplicitate 1
- un zerou în -1 cu multiplicitate 2
- un indice minimal la dreapta egal cu 0
- un indice minimal la stânga egal cu 0

Exemple numerice

Compensator unitar

$$\begin{bmatrix} \frac{4.95z^3-0.85z^2-9.65z+14.32}{z^2-11.76z+19.52} & \frac{5.44z^3-3.74z^2+2.06z-3.76}{z^2-11.76z+19.52} & \frac{-7.92z^3+4.67z^2-3.11z+6.36}{z^2-11.76z+19.52} \\ \frac{3.82z^3-2.12z^2+3.67z-5.38}{z^2-11.76z+19.52} & \frac{4.21z^3-2.62z^2-8z+15.16}{z^2-11.76z+19.52} & \frac{-6.12z^3+4.67z^2-5.61z+7.05}{z^2-11.76z+19.52} \\ \frac{-6.3z^3+3.05z^2-4.73z+7.98}{z^2-11.76z+19.52} & \frac{-6.93z^3+5.48z^2-4.8z+6.24}{z^2-11.76z+19.52} & \frac{10.08z^3-6.01z^2-4.6z+9.28}{z^2-11.76z+19.52} \end{bmatrix}$$

Sistemul rezultat

$$\begin{bmatrix} 6.45z^3-7.06z^2+4.06z+0.55 & 6.45z^3-7.06z^2+4.06z+1.55 & 12.89z^3-14.12z^2+8.11z+0.11 \\ 6.21z^3-10.09z^2+7.77z+1.11 & 6.21z^3-10.09z^2+7.77z+3.11 & 12.42z^3-20.18z^2+15.54z+0.22 \\ -4.93z^3-3.38z^2+7.2z+1.11 & -4.93z^3-3.38z^2+7.2z+3.11 & -9.86z^3-6.76z^2+14.4z+0.22 \end{bmatrix}$$

Exemple numerice

Structura sistemului rezultat

- un pol la ∞ cu multiplicitate 3
- 3 zerouri finite simple în interiorul discului unitate (0.5, 0 și 0.1)
- un indice minimal la dreapta egal cu 0
- un indice minimal la stânga egal cu 0

Conservarea normei

$$||G(z)||_\infty = ||G_{sz}(z)||_\infty = 71.96$$

Rezultat publicat

Cristian Oară, Cristian Flutur, Marc Jungers. *Squaring down with zeros cancellation in generalized systems*. Systems Control Letters, 92: 5 - 13, 2016
http://dx.doi.org/10.1016/j.sysconle.2016.02.019

Concluzii

Contribuții

- Legatura dintre spectrul la infinit al unei raționale matriceale arbitrare și o realizare centrată a acesteia
- Factorizare minimală pentru o rațională improprie
- Factorizare neminimală (Wiener Hopf) pentru o rațională improprie
- Compresie de rang și dislocare de zerouri pentru o rațională arbitrară
- Condițiile de existență și procedurile de construcție a soluțiilor sunt date în termenii realizărilor
- Procedurile de construcție se pot traduce relativ ușor în algoritmi numerici